# העתקה לינארית

## הגדרה

העתקה לינארית או טרנספורמציה לינארית היא פונקציה שמאפשרת לנו לעבור ממרחב אחד למרחב אחר. המרחבים יכולים להיות ממימד שונה או בסיסים שונים, ואפילו ניתן לעשות העתקה ממרחבים מסוגים שונים כמו ממרחב של וקטור למרחב של פולינומים או מטריצות. וכן ניתן לעבור ממרחב אחד לעצמו, פעולה זו נקראת "אופרטור לינארי".

ננסה לדמיין דוגמא להעתקה לינארית. ישנו מרחב דו מימדי מסוים, נדמיין אותו בתור קווי אורך ורוחב במרחקים שווים זה מזה. כעת נדמיין שכל הקווים מצודדים ימינה ומתרחקים זה מזה באופן שווה. מה שקרה הוא שעשינו העתקה מהמרחב הדו מימדי הראשון למרחב דו מימדי אחר שהבסיס שלו שונה. בהעתקה לינארית המרחב כולו זז, גדל או קטן, אמנם ישנם כמה תכונות שצריכים להישמר אחרת העתקה זו לא תחשב העתקה לינארית: נקודת המרכז של המרחב לא משתנית, הקווים לא מתעקמים אלא רק מצודדים, וכן המרחק בין כל הקווים תמיד שווה. כעת אנו יכולים להגדיר תכונות אלו כמו שהם מתבטאות בצורה מתמטית.

## תכונות העתקה לינארית

נתונים שני המרחבים S ו-B והעתקה לינארית המקיימת T: S -> B. העתקה זו חייבת לקיים שלושה תכונות:

1. אם נציב בפונקציה את וקטור ה-0 נקבל את וקטור ה-0. T(0) = 0
2. אם נסכום שני וקטורים v ו-u ונציב בפונקציה זה שווה להצבת שני הוקטורים בנפרד וסכימת התוצאה. T(u + v) = T(u) + T(v)
3. אם נכפול את וקטור v בסקלר a ונציב בפונקציה זה שווה להצבת הוקטור בנפרד ולהכפיל את התוצאה בסקלר. T(𝛼∙v) = 𝛼∙T(v)

## משפטים

### משפט 1:

כל העתקה לינארית מהצורה T: Rn -> Rm, באה מהצורה T(v) = A∙v כאשר A היא מטריצה מסדר גודל של m x n. A נקראת המטריצה המייצגת של T.

אם נחזור להעתקה המדומיינת שעשינו בסעיף א' בה אמרנו שקווי הרוחב והאורך מצודדים ומתרחקים זה מזה, נשים לב שמספיק שנדע את שינוי המיקום של וקטורי הבסיס הפורשים את המרחב, כדי שנדע את שינוי המיקום של כל הוקטורים. נעשה זאת באמצעות כך שנייצר מהמיקום החדש של וקטורי הבסיס מטריצה, וכל וקטור שנכפול במטריצה זו ייתן לנו את המיקום החדש של הוקטור. מטריצה זו היא בעצם מטריצה A ולכן נקראת "המטריצה המייצגת של "T. כל העתקה לינארית נוכל לתאר באמצעות מטריצה מסוג זה.

### משפט 2:

תהי פונקציה F: Rn -> Rm המקיימת F(v) = A∙v. אם A היא מטריצה מסדר גודל של m x n אז פונקציה F היא העתקה לינארית.

הוכחה: F(u + v) = A∙ (u + v) = Au + Av = F(u) + F(v)

F(𝛼∙u) = A∙𝛼∙u = 𝛼∙Au = 𝛼∙F(u)

### משפט 3:

יהי V ו-W מרחבים וקטוריים, ויהי v1, v2, …, vn וקטורי הבסיס ל-V ו- w1, w2, …, wn וקטורים כלשהם ב-W. אז קיימת העתקה אחת ויחידה T: V -> W המקיימת:

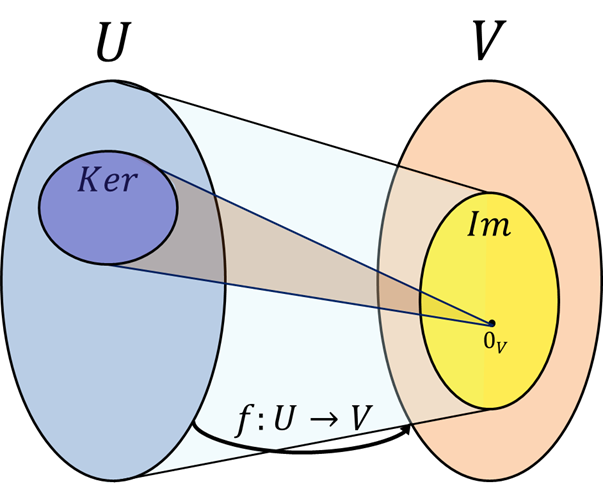
T(v1) = w1, T(v2) = w2, …, T(vn) = wn.

## גרעין ותמונה

קיימת העתקה לינארית F: U -> V. הגרעין של F הוא קבוצה של כל הוקטורים ב-U שאם נציבם בהעתקה הלינארית נקבל את וקטור ה-0 השייך ל-V, נסמן גרעין של F כך: ker(f).

התמונה של F הוא קבוצה של כל הוקטורים ב-V שניתן להגיע אליהם באמצעות העתקה לינארית, נסמן גרעין של F כך:img(f) .

**טענה:** התמונה של F היא תת מרחב של V, והגרעין של F הוא תת מרחב של U. ולכן מכיוון שהגרעין והתמונה הם תתי מרחבים ניתן למצוא להם: בסיס, מימד, ומערכת משוואות.



### משפטים

1. תהי העתקה לינארית F: Rn -> Rm, אז F היא חד חד ערכית (חח"ע) אם ורק אם מתקיים: dim( ker(f) ) = 0, כלומר אם ורק אם הגרעין הוא הקבוצה הריקה ker(f) = {0}. זאת משום שאם בגרעין יש יותר מוקטור אחד אז יש תמונה (וקטור ה-0) שיש לה יותר ממקור אחד, ולכן F לא תהיה חח"ע.
2. תהי העתקה לינארית F: Rn -> Rm, אז F היא על אם ורק אם מתקיים: dim( img(f) ) = m.
3. תהי העתקה לינארית F: U -> V. מתקיים:[[1]](#footnote-1)dim( img(f) ) + dim( ker(f) ) = dim(u) .

## הרכבת העתקות לינאריות

העתקה לינארית היא כמו פונקציה, לכן כמו שניתן להרכיב פונקציות ניתן להרכיב העתקות לינאריות. קיימת העתקה לינארית F: Rn -> Rm והעתקה לינארית G: Rm -> Rp אז ההרכבה של G על F היא העתקה המקיימת G\*F: Rn -> Rp.

אם המטריצה המייצגת של F היא A, המטריצה המייצגת של G היא B, והמטריצה המייצגת של G\*F היא C, אז היחס בין כל מטריצות אלו הוא C = B∙A. מסקנה: הרכבת העתקות תואמת לכפל מטריצות.

# וקטור קואורדינטות

## הגדרה

יהי V מרחב וקטורי, ויהי B = (v1, v2, …, vn) וקטורי הבסיס של V. בהינתן וקטור w השייך ל-V, מתקיים: w = 𝛼1∙v1 + 𝛼2∙v2 + ⋯ + 𝛼n∙vn . אזי וקטור הקואורדינטות של w לפי B הוא: [w]B = (𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n).

נשים לב כי וקטור הקואורדינטות של כל וקטור נתון לפי הבסיס הסטנדרטי E, שוקטורי הבסיס שלו הם בעצם העמודות במטריצת היחידה, היא אותו הוקטור עצמו [u]E = u.

## בסיסים שונים לאותו תת מרחב

לכל מרחב וקטורי יש מספר קבוע של וקטורים בבסיס, אמנם יכול להיות שלאותו מרחב וקטורי יהיו וקטורים שונים בבסיס שפורשים את אותו המרחב. במצב זה לוקטור אחד במרחב יש מספר וקטורי קואורדינטות.

יהי מרחב וקטורי V, ויהי B = (v1, v2, …, vn) ו- C = (u1, u2, …, un) שתי סוגים של וקטורי הבסיס של V. בהינתן וקטור w השייך ל-V, כך שמתקיים:

β1∙u1 + β2∙u2 + ⋯ + βn∙un w = 𝛼1∙v1 + 𝛼2∙v2 + ⋯ + 𝛼n∙vn =

אזי וקטור הקואורדינטות של w לפי B הוא: [w]B = (𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n), ווקטור הקואורדינטות של w לפי C הוא: [w]C = (β1, β2, …, βn).

### מטריצת מעבר בסיס

כדי לעבור מוקטור קואורדינטות של אותו הוקטור לפי בסיסים שונים נשתמש "במטריצת מעבר בסיס". נסמן מטריצה זו מבסיס B לבסיס C PC<-B, כך שמתקיים: [w]C = PC<-B∙[w]B .

נשים לב שמטריצת מעבר הבסיס צריכה להיות מגודל n n x מפני שאנו מכפילים אותה בוקטור בגודל n ומצפים לקבל וקטור בגודל n. כדי למצוא את מטריצת מעבר בסיס יש שתי שיטות:

1. בונים מטריצה חדשה שמצד שמאל נמצאים וקטורי הבסיס של C בתור עמודות, ומצד ימין וקטורי הבסיס של B בתור עמודות, כך שנקבל מטריצה שנראית כך: [ C | B ]. נוכל להיעזר בסימון של מטריצת מעבר הבסיס PC<-B כדי לדעת באיזה צד לשים כל מטריצה. מדרגים את מטריצה C עד שהיא הופכת להיות מטריצת היחידה. המטריצה שתתקבל בצד ימין היא מטריצת מעבר הבסיס.
2. לוקחים את וקטורי הבסיס של B ומוצאים את וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי C. מטריצת מעבר הבסיס תהיה וקטורי קואורדינטות אלו לפי הסדר. PC<-B = [ [v1]C, [v2]C, …, [vn]C ]

## מטריצה מייצגת לפי בסיסים

### הגדרה

יהי שני מרחבים וקטוריים V ו-W והעתקה לינארית F: V -> W. ויהי A = (v1, v2, …, vn) וקטורי הבסיס של V, ו- B = (w1, w2, …, wm) וקטורי הבסיס של W. אזי "המטריצה המייצגת לפי בסיסים" של העתקה הלינארית F היא מטריצה שאם נכפיל אותה (משמאל) בכל וקטור קואורדינטות ב-V נקבל את וקטור הקואורדינטות ב-W של הוקטור המתאים לפי העתקה הלינארית.

כלומר, יהי הוקטור a וקטור כלשהו ב-V המקיים a = 𝛼1∙v1 + 𝛼2∙v2 + ⋯ + 𝛼n∙vn, כך שוקטור הקואורדינטות של a לפי A הוא [a]A = (𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n). ויהי הוקטור b וקטור ב-W המתאים לוקטור a לפי העתקה הלינארית המקיים b = β1∙w1 + β2∙w2 + ⋯ + βm∙wm, כך שוקטור הקואורדינטות של b לפי B הוא [b]B = (β1, β2, …, βm). אזי נוכל לחשב את [b]B באמצעות המטריצה המייצגת לפי בסיסים, אותה נסמן [F]AB, באמצעות הנוסחה: [b]B = [F]AB∙[a]A .

המטריצה המייצגת לפי בסיסים בעצם זהה למטריצה המייצגת הרגילה, אלא שבמקום להכפיל אותה פשוט בוקטור a ולקבל את הוקטור המתאים b מכפילים בוקטור הקואורדינטות [a]A ומקבלים את וקטור הקואורדינטות המתאים [b]B.

### כיצד מוצאים מטריצה מייצגת לפי בסיסים

נשים לב שהמטריצה המייצגת לפי בסיסים צריכה להיות בגודל m x n, משום שאנו מכפילים אותה בוקטור בגודל n ומצפים לקבל וקטור בגודל m. למציאת מטריצה זו יש שתי שיטות:

1. לוקחים את כל וקטורי הבסיס ב-V (v1, v2, …, vn) ומוצאים את ההעתקה שלהם ב-W. לכל הוקטורים שקיבלנו מוצאים את וקטור הקואורדינטות שלהם לפי B. מציבים וקטורים אלו בתור עמודות בהתאמה במטריצה ומקבלים את המטריצה המייצגת לפי בסיסים:

[F]AB = [ [f(v1)]B, [f(v2)]B, …, [f(vn)]B ].

1. נסמן ב-C את המטריצה המייצגת הרגילה של F המקיימת: F(v) = C∙v. עוד נסמן ב-E את וקטורי הבסיס הסטנדרטי בגודל של הבסיס A, כך שנקבל שוקטורי הבסיס של E הם בעצם העמודות במטריצת היחידה בגודל של הבסיס A. וכן נסמן ב-E' את וקטורי הבסיס הסטנדרטי בגודל של הבסיס B. המטריצה המייצגת לפי בסיסים תהיה המכפלה בין שלושת המטריצות:

[F]AB = PB<-E'∙C∙PE<-A.

כאשר PB<-E' היא מטריצת המעבר מבסיס E' לבסיס B, C היא המטריצה המייצגת של F, ו-PE<-A היא מטריצת המעבר מבסיס A לבסיס E.

# מרחבים נוספים

## מרחב הפולינומים

עד כה עסקנו בעיקר במרחב של וקטורים פשוטים, אולם כעת נלמד כי ישנם מרחבים נוספים. פולינום (רב איבר) הוא ביטוי מתמטי המחבר בין איברים שונים. לכל איבר יש מקדם מספרי המוכפל במשתנה x כאשר בכל איבר המשתנה בחזקה שונה. החזקה הגבוה ביותר בפולינום נקראת "דרגת הפולינום".

פולינומים דומים מאוד לוקטורים, זאת מכיוון שכל הפעולות הבסיסיות בפולינום, כמו חיבור פולינומים או כפל בסקלר, משפיעות רק על המקדמים של האיברים. לכן ניתן להסתכל על כל המקדמים של הפולינום כעל וקטור. בנוסף לכך, מתברר שפולינומים מקיימים את כל תשעת התנאים הנצרכים למרחב, על כן גם קבוצה של פולינומים הם מרחב.

### הצגה של מרחב פולינומי

נציג מרחב של פולינומים בצורה הבאה - Rn[x]. כאשר R מייצג שהמקדמים הם ממשיים, n מייצג את דרגת הפולינום, ו-x מייצג את המשתנה בפולינום. מספר האיברים בכל וקטור ממרחב פולינומים יהיה תמיד n+1, זאת משום שבכל פולינום יש גם איברים שהחזקה של x היא 0 (קבועים). לכן תמיד מתקיים: Rn[x] = Rn+1. לדוגמא: מרחב הפולינומים R2[x] מקביל למרחב הוקטורי R3.

נדגיש כי הביטוי Rn[x] מייצג את מרחב כל הפולינומים **עד** דרגה n. לדוגמא: במרחב הפולינומים R3[x] המייצג פולינומים מסוג a∙x3 + b∙x2 + c∙x1 + d∙x0, יכולים להיות פולינומים כמו 2x + 3 כאשר a ,b = 0, כלומר הוקטור יראה כך: [0, 0, 2, 3]. כך שבניגוד למרחב וקטורי שם נרשום כל איבר גם אם הוא 0, במרחב פולינומים איבר שהמקדם שלו 0 לא נרשום אותו. מכיוון שכל פולינום הוא פונקציה של x נרשום פולינום כך a(x), בניגוד למרחב וקטורי שם הוקטור המקביל היה נקרא a.

### בסיס למרחב פולינומי

בסיס למרחב פולינומים מיוצג על ידי פולינומים. הבסיס הסטנדרטי למרחב Rn[x] יהיה הפולינומים: xn, xn-1, …, x2, x1, 1.

## פעולות במרחב פולינומים

כל הפעולות שניתן לעשות במרחב וקטורי ניתן לעשות במרחב פולינומי, על ידי כך שמסתכלים על המקדמים של כל פולינום כאל וקטור. בחיבור פולינומים נחבר בין כל המקדמים של האיברים שהמשתנה שלהם באותה החזקה. בכפל פולינום בסקלר נכפיל את כל המקדמים בסקלר.

### וקטור קואורדינטות

נשים לב כי וקטור הקואורדינטות של פולינום הוא וקטור רגיל ולא פולינום. ניתן למצוא וקטור קואורדינטות של פולינום נתון על ידי שמציבים את המקדמים של הפולינומים בבסיס במטריצה, ואת מקדמי הפולינום הנתון בוקטור הפתרונות. מדרגים את המטריצה. הפתרונות הם וקטור הקואורדינטות.

## מרחב מטריצות

גם מטריצות דומות מאוד לוקטורים משום שניתן לכתוב כל מטריצה כוקטור. לשם כך נרשום את כל המספרים במטריצה בעמודה אחת ארוכה, כאשר קודם השורה הראשונה, השנייה, וכן הלאה. התוצאה תהיה וקטור. בנוסף לכך, מתברר שמטריצות מקיימות את כל תשעת התנאים הנצרכים למרחב, על כן גם קבוצה של מטריצות הם מרחב.

### הצגה של מרחב מטריצות

נציג מרחב של מטריצות בצורה הבאה – Rn x m. כאשר R מייצג שהמספרים במטריצה הם ממשיים, n מייצג את מספר השורות, ו-m מייצג את מספר העמודות. כמו שאמרנו ניתן להציג כל מטריצה כוקטור, לכן מרחב מטריצות מסוג Rn x m מקביל למרחב וקטורי מסוג Rn∙m. לדוגמא: מרחב המטריצות R2 x 3 מקביל למרחב הוקטורי R6.

### בסיס למרחב מטריצות

בסיס למרחב מטריצות מיוצג על ידי מטריצות. בסיס הסטנדרטי למרחב Rn x m יהיה:

[1 0 … 0] [0 1 … 0] [0 0 … 1] [0 0 … 0] [0 0 … 0]

[0 0 … 0] [0 0 … 0] [0 0 … 0] [1 0 … 0] [0 0 … 0]

[… ] [… ] [… ] [… ] [… ]

[0 0 … 0] [0 0 … 0] … [0 0 … 0] [0 0 … 0] … [0 0 … 1]

## פעולות במרחב מטריצות

כל הפעולות שניתן לעשות במרחב וקטורי ניתן לעשות במרחב מטריצות, על ידי כך שמסתכלים על כל מטריצה כוקטור. למדנו כבר בלינארית 1 חיבור בין מטריצות וכפל מטריצה בסקלר.

# ערכים ווקטורים עצמיים, דמיון מטריצות, ומטריצה לכסינה

## ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, ויהי v וקטור השונה מוקטור ה-0, ויהי 𝜆 סקלר. אם מתקיים: A∙v = 𝜆∙v - אזי 𝜆הוא "ערך עצמי" של A, ו-v הוא "וקטור עצמי" של A התואם ל-𝜆.

אם v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 𝜆, אז לכל 𝛼∙v, כאשר 𝛼 סקלר, הוא גם וקטור עצמי של A עם אותו ערך עצמי 𝜆. אנו נתייחס לכל 𝛼∙v כאל וקטור עצמי אחד. מספר הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים בכל מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, יהיה בין 1 ל-n אך לא יותר.

## מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

### מציאת ערכים עצמיים

נתונה מטריצה ריבועית A מסדר גודל n x n. צריך למצוא וקטור v וסקלר 𝜆 כך שמתקיים: A∙v = 𝜆∙v. נשים לב כי מתקיים: A∙v - 𝜆∙v = (A - 𝜆∙I)∙v = A∙v = 𝜆∙v .



קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית כאשר וקטור v הוא וקטור הנעלמים (x1, x2, …, xn). למערכת משוואות הומוגניות תמיד יש פתרון טריוויאלי, אולם מטרתנו לפי איך שהגדרנו וקטור עצמי בסעיף קודם היא לקבל אינסוף פתרונות, כלומר שנקבל וקטור שלפחות אחד המשתנים בו חופשי. אחת המסקנות של "משפט העקרונות השקולים"[[2]](#footnote-2), היא שאם במטריצה ריבועית הדטרמיננטה שונה מ-0 אזי יש לה פתרון יחיד. לכן אנו נחפש מתי הדטרמיננטה של המטריצה (A - 𝜆∙I) שווה ל-0.

Det(A - 𝜆∙I) = |A - 𝜆∙𝐼| = 0.

בעזרת משוואה זו נוכל למצוא את הערכים העצמיים 𝜆 של המטריצה A.

### מציאת וקטורים עצמיים

לאחר שמצאנו את הערכים העצמיים נוכל למצוא את הוקטורים העצמיים. כדי למצוא אותם צריך לפתור: A∙v = 𝜆∙vאו בצורה יותר נוחה: (A − 𝜆∙𝐼) v = . משוואה זו היא בעצם מערכת משוואות הומוגנית. נפתור את המערכת, נמצא את כל ערכי המשתנים, ונציב אותם חזרה בוקטור v. במידה והוא אינו וקטור ה-0, נפרק את v לפי מספר הפרמטרים החופשיים שבו. כל וקטור כזה נאמר שהוא הוקטור העצמי של A עבור הערך העצמי 𝜆.

במקרים בהם יש יותר מערך עצמי אחד יש להציב כל פעם ערך עצמי אחר ולמצוא את הוקטוריים העצמיים של A עבור אותו ערך עצמי 𝜆1, 𝜆2, …, 𝜆n. וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית (בת"ל).

### ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי

נשים לב שבדרך החישוב של הדטרמיננטה של המטריצה (A - 𝜆∙I), נקבל פולינום שהמשתנה בו הוא 𝜆 והדרגה שלו היא n. פולינום זה נקרא "הפולינום האופייני של A", והשורשים שלו הם בדיוק הערכים העצמיים של A.

לפי "המשפט היסודי של האלגברה" לכל פולינום בדרגה n יש בדיוק n שורשים עם כפילויות. כלומר כאשר נחשב את הערכים העצמיים תמיד נקבל n ערכים, אולם יכול להיות שנקבל את אותו ערך מספר פעמים, כמו במשוואה הבאה: (𝜆 – 2)3 = 0, שאז נקבל שלושה ערכים עצמיים שכולם שווים ל-2. במקרה שכזה נאמר "שהריבוי האלגברי" של 𝜆 הוא שלוש. בבואנו לחשב את הוקטורים העצמיים, מספר הוקטורים שנקבל יהיה לפי מספר המשתנים החופשים בפתרון המטריצה. מספר המשתנים החופשיים הוא "הריבוי הגיאומטרי" של 𝜆. תמיד מתקיים: ריבוי אלגברי ריבוי גאומטרי 1. המסקנה היא שלא תמיד נקבל n ערכים עצמיים שונים ו-n וקטורים עצמיים, אלא לעיתים נקבל גם פחות מכך.

לפי המשפט היסודי של האלגברה תמיד יש n פתרונות, אולם לא בהכרח שכולם ממשיים אלא יכול להיות שהפתרונות הם גם מספרים מרוכבים. במקרה זה גם הוקטורים העצמיים יהיו מרוכבים.

## הפולינום האופייני

כמו שאמרנו, הפולינום האופייני של מטריצה A מסדר גודל n x n הוא פולינום המתקבל מהחישוב det(A - 𝜆∙I) = 0, שהמשתנה בו הוא 𝜆 והדרגה שלו היא n. הוא יראה כך:

PA(𝜆) = Cn∙𝜆n + Cn-1∙𝜆n-1 +…+ C1∙𝜆 + C0

### תכונות הפולינום האופייני

1. Cn = (-1)n
2. Cn-1 = (-1)n-1∙tr(A)
3. C0 = det(A)

כלומר הפולינום האופייני מגלה לנו את det(A) ואת tr(A) גם בלי לראות את המטריצה.

### מציאת ערכים עצמיים בפולינום מדרגה גבוהה

בחלק מהמטריצות נקבל פולינום אופייני בדרגה גבוהה מאוד שיהיה נורא קשה לחשב את השורשים שלו, שהם בעצם הערכים העצמיים של המטריצה. במקרים אלו נוכל להיעזר במשפט הבא:

משפט: נתון פולינום P(x) = an∙xn + an-1∙xn-1 +…+ a1∙x + a0  עם מקדמים שלמים. אזי:

1. אם יש לפולינום שורש שלם אז הוא בהכרח מחלק את a0.
2. אם יש לפולינום שורש רציונלי אז בהכרח המונה בשורש מחלק את a0 והמכנה מחלק את an.

בעזרת משפט זה נוכל למצוא את שורשי הפולינום באמצעות הפעולות הבאות: ניקח את כל המספרים השלמים והרציונליים המועמדים להיות שורש הפולינום לפי המשפט, ונציב אותם בפולינום לראות איזה מהם הוא אכן השורש של הפולינום.

לאחר מכן כדי למצוא את כל השורשים הלא רציונליים נשתמש במשפט בזו[[3]](#footnote-3) ונחלק את p(x) ב-(x-a). נחפש שורשים לתוצאת החילוק שהם יהיו גם השורשים ל-p(x).

## משפט קיילי - המילטון

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n. המשפט אומר שאם נציב בפולינום האופייני של A PA(𝜆) = Cn∙𝜆n + Cn-1∙𝜆n-1 +…+ C1∙𝜆 + C0, במקום 𝜆 את A נקבל בפולינום האופייני את מטריצת ה-0, כלומר PA(A) = 0.

הערה - את המספר הקבוע בפולינום C0 נכפיל במטריצת היחידה בגודל n x n, כדי שנוכל לחבר איבר זה עם שאר האיברים שהם מטריצות.

### שימושים למשפט

1. **מציאת מטריצה הופכית** - ניקח את הפולינום האופייני של A שהצבנו בו במקום 𝜆 את A ונקבל לפי משפט קיילי - המילטון: PA(A) = Cn∙An + Cn-1∙An-1 +…+ C1∙A + C0∙I = 0. כעת נכפיל את שני האגפים במטריצה ההופכית A-1 ונקבל: Cn∙An-1 + Cn-1∙An-2 +…+ C1∙I + C0∙A-1 = 0. במצב זה נוכל לבודד את A-1 כך: A-1 = -1/C0(Cn∙An-1 + Cn-1∙An-2 +…+ C1∙I).
2. **מציאת חזקה גבוהה של מטריצה An** - נחלק את An בפולינום האופייני של A בחילוק ארוך. נסמן את הפלינום האופייני C, את תוצאת החילוק Q, ואת השארית R, כאשר בכולם המשתנה הוא 𝜆. נשים לב כי מתקיים: An = C∙Q + R. אם נציב במקום 𝜆 את A, אזי לפי משפט קיילי - המילטון C = 0. ואזי נקבל כי An = R. במילים אחרות, An שווה לשארית של החלוקה של An בפולינום האופייני של A, אלא שבמקום 𝜆 נציב את A.

## מרחב עצמי

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, ויהי 𝜆 סקלר. אז "המרחב העצמי" של A ו- 𝜆הוא מרחב המכיל את כל הוקטורים בגודל n שהם וקטורים עצמיים של A עבור הערך העצמי 𝜆. אלא שמרחב זה כולל גם את וקטור ה-. VA(𝜆) = {vRn : A∙v=𝜆∙v} .

כבר אמרנו (סעיף א') שאם v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 𝜆, אז לכל 𝛼∙v, כאשר 𝛼 סקלר, הוא גם וקטור עצמי של A עם אותו ערך עצמי 𝜆. לכן כל הוקטורים מסוג 𝛼∙vVA(𝜆). מספר הוקטורים במרחב העצמי שאינם תלויים לינארית, כלומר המימד של המרחב העצמי dim(VA(𝜆)), שווה לריבוי הגיאומטרי של 𝜆. עבור 𝜆 שאינו ערך עצמי המרחב העצמי של A ו- 𝜆מכיל אך ורק את וקטור ה-0, מפני שלכל A ו-𝜆 מתקיים: A∙=𝜆∙, ולכן המימד יהיה גם כן 0.

המרחב העצמי הוא תת מרחב של Rn (או Cn) מפני שמקיים את התנאים הנצרכים לתת מרחב:

1. מכיל את וקטור ה-0, מפני שלכל A ו-𝜆 מתקיים: A∙=𝜆∙.
2. שני וקטורים מהמרחב העצמי v1 ו- v2מקיימים: 2,A∙v2=𝜆∙v A∙v1=𝜆∙v1. ואם נחבר ביניהם נקבל: A(v1+v2) = 𝜆(v1+v2) ולכן גם הוקטור v1+v2VA(𝜆) כנדרש.
3. וקטור מהמרחב העצמי v מקיים: A∙v=𝜆∙v. אם נכפיל בסקלר 𝛼 נקבל: 𝛼∙A∙v=𝛼∙𝜆∙v. מכיוון ש- 𝛼סקלר ניתן לסדר כך: A(𝛼∙v) = 𝜆(𝛼∙v) ולכן גם הוקטור 𝛼∙vVA(𝜆) כנדרש.

## דמיון מטריצות

יהי מטריצות A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר גודל n x n. מטריצות אלו יקראו "מטריצות דומות" אם קיימת מטריצה P הפיכה כך שמתקיים: B = P∙A∙P-1. במידה וכן נאמר שמטריצה A דומה למטריצה B, ונסמן: A~B. אך אם לא קיימת מטריצה כזאת, נאמר שהמטריצות לא דומות.

יחס הדמיון מקיים:

1. רפלקסיביות - לכל מטריצה A מתקיים: A~A.
2. סימטריות - אם A~B אז גם B~A.
3. טרנזיטיביות - אם A~B ו-B~C אז גם A~C.

המסקנה מקיום שלושה תנאים אלו הוא שיחס הדמיון במטריצות הוא יחס שקילות. המשמעות של יחס שקילות לענייננו הוא שניתן לחלק את קבוצת כל המטריצות שהן מאותו סדר גודל n x n למחלקות שקילות. שתי מטריצות מאותה מחלקת שקילות הן דומות, ואילו שתי מטריצות שאינן מאותה מחלקה אינן דומות. מחלקות השקילות אינן באותן גודל, לדוגמא: מטריצת היחידה I דומה אך ורק לעצמה.

## תכונות

אם A ו-B מטריצות דומות A~B כך שמתקיים: B = P∙A∙P-1, אזי:

1. הדטרמיננטות שלהם שוות det(A) = det(B).
2. העקבה שלהם שווה tr(A) = tr(B). עקבה (trace) של מטריצה היא סכום האיברים של האלכסון הראשי.
3. יש להם את אותו הפולינום האופייני PA(𝜆) = PB(𝜆). כתוצאה מכך הם חולקים את אותם ערכים עצמיים **עם אותם ריבויים אלגבריים וריבויים גאומטריים**. \*וכן שני התכונות הקודמות נובעות מכך.
4. אם v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 𝜆, אזי P∙v הוא וקטור עצמי של B עם ערך עצמי 𝜆. A∙v = 𝜆∙v B(P∙v) = 𝜆(P∙v).

**אזהרה!** משפטים אלו הם לא "אם ורק אם", כלומר יכול להיות שהדטרמיננטות או העקבה או הפולינום האופייני של שתי מטריצות יהיו שוות אך הן לא בהכרח יהיו גם דומות.

## משמעות דמיון מטריצות

המשמעות של מטריצות דומות הוא שהם מייצגות את אותה העתקה לינארית אך לפי בסיסים שונים.

כלומר, אם קיימים שני מרחבים וקטוריים V ו-W מאותו הגודל n והעתקה לינארית F ביניהם F: V -> W. כמו שכבר ציינו לכל מרחב וקטורי יכולים להיות מספר בסיסים שונים אך עם אותו מספר וקטורים. נגדיר שלמרחב V ולמרחב W יש את אותם בסיסים E ו-B (E הוא וקטורי הבסיס הסטנדרטי בגודל n ). בנוסף נגדיר וקטור v ב-V ווקטור w ב-W שהוא הוקטור המתאים לו לפי העתקה הלינארית f(v) = w. נשים לב כי לכל אחד מהוקטורים v, w יש שני סוגים של וקטור קואורדינטות: [v]E, [v]B, [w]E, [w]B,. אזי קיימות מספר מטריצות מייצגות לפי הבסיסים השונים של העתקה הלינארית ,F באמצעותן ניתן לחשב את וקטורי הקואורדינטות של w: [w]E = [F]EE∙[v]E, [w]B = [F]BB∙[v]B.

הכלל הוא שתמיד מטריצות מייצגות לפי בסיסים אלו כמו: [F]EE ו-[F]BB הם מטריצות דומות, מפני שהן מייצגות את אותה העתקה לינארית F, אך לפי בסיסים שונים. ניתן לראות שהן דומות מכך שאם ננסה לחשב מטריצות אלו לפי השיטה השנייה שלמדנו למציאת מטריצה מייצגת לפי בסיסים, נקבל: [F]BB = PB<-E∙C∙PE<-B. כאשר ניתן להסתכל על C כאל המטריצה המייצגת לפי הבסיסים [F]EE, כך שבעצם מתקיים: [F]BB = PB<-E∙[F]EE ∙PE<-B. שזוהי בדיוק ההגדרה של דמיון מטריצות!

לעיתים כאשר נעשה פעולות בהעתקה לינארית, ונרצה להשתמש במטריצה מייצגת לפי בסיס אחר ממה שנתון (בדר"כ מטעמי נוחות), אזי תמיד נדע שהקשר בין כל המטריצות המייצגות לפי הבסיסים השונים של ההעתקה הלינארית הוא שהן דומות.

## מטריצה לכסינה

מטריצה ריבועית תקרא "מטריצה לכסינה" אם היא דומה לאיזו מטריצה אלכסונית. מטריצה אלכסונית היא מטריצה ריבועית שכל איבריה חוץ מאלכסון ראשי שווים ל-0[[4]](#footnote-4). במילים אחרות, אם A היא מטריצה ריבועית אז A תקרא "לכסינה" אם מתקיים A = P∙D∙P-1. כאשר P היא מטריצה הפיכה, ו-D היא מטריצה אלכסונית.

מסתבר שיש קשר בין דמיון מטריצות ומטריצה לכסינה לערכים עצמיים ווקטורים עצמיים. כדי למצוא את P ו-D יש למצוא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה A. מטריצה P תהיה מטריצה שהעמודות שלה הם הוקטורים העצמיים של מטריצה A, מטריצה זו נקראת גם "מטריצה מלכסנת". ומטריצה D תהיה מטריצה אלכסונית שכל האיברים שלה באלכסון ראשי הם הערכים העצמיים של A. חשוב לשים לב כשבונים את P ו-D שהמיקום של הערכים העצמיים מקביל לוקטורים העצמיים המתאימים להם.

נמצא אם כן, שהמסקנה העולה ממשפט זה הוא שמטריצה לכסינה אם ורק אם יש לה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. במקרה שריבוי אלגברי של 𝜆 גדול מ-1 אזי הריבוי הגיאומטרי צריך להיות שווה לריבוי האלגברי כדי שהמטריצה תהיה לכסינה, במידה והם אינם שווים המטריצה אינה לכסינה.

כשנתבקש "ללכסן את A", הכוונה זה למצוא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים: A = P∙D∙P-1, וכבר למדנו שנעשה זאת באמצעות כך שנמצא קודם את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של A.

### שיטה לבדיקת דמיון מטריצות

שיטה לדעת אם שתי מטריצות דומות או שאינן דומות אומרת כך:

1. אם מטריצה אחת לכסינה והשנייה לא - אזי המטריצות אינן דומות.
2. אם שתיהן לכסינות אז הן דומות אם ורק אם יש להן את אותם ערכים עצמיים עם אותם ריבויים אלגבריים וריבויים גאומטריים.
3. אם שתיהן לא לכסינות אזי צריך להשתמש בשיטת "צורת ז'ורדן" שאינה בחומר של הקורס.

## שימוש בלכסון מטריצות

נשים לב שכאשר מכפילים מטריצה אלכסונית שהאלכסון ראשי שלה הוא: a, b, c. עם מטריצה אלכסונית שנייה שהאלכסון ראשי שלה הוא: d, e, f. אזי מתקבלת מטריצה אלכסונית שהאלכסון ראשי שלה הוא: a∙d, b∙e, c∙f. כלומר כל איבר מוכפל באיבר המקביל לו כמו בכפל וקטורים. אותו עיקרון חל גם אם נעלה את המטריצה האלכסונית בחזקה או שורש. נשתמש בתכונה זו במקרים הבאים:

1. **חישוב חזקת מטריצה לכסינה** - אם A אינה מטריצה אלכסונית אך לכסינה כך שמתקיים: A = P∙D∙P-1 ונרצה לחשב An. אז במקום לחשב An = P∙D∙P-1∙P∙D∙P-1∙…∙P∙D∙P-1, נשים לב כי D∙P-1∙P = D, לכן אם נחליף כל ביטויים אלו ב-D נקבל את המשוואה: An = P∙Dn∙P-1. שלפי התכונה שלמדנו יהיה הרבה יותר קל לחשב.
2. **חישוב שורש מטריצה לכסינה** - אם A אינה מטריצה אלכסונית אך לכסינה כך שמתקיים: A = P∙D∙P-1 ונרצה לחשב . נשים לב כי זוהי מטריצה B כך ש-Bn = A, יכול להיות כמה כאלו. בצורה דומה למה שלמדנו קודם במקום לחשב בדרך הארוכה נוכל לחשב פשוט את המשוואה: = P∙∙P-1 .

# מרחבי מכפלה פנימית

## מכפלה סקלרית בממשיים - Rn

היא מכפלה בין שני וקטורים או יותר בעלי אותו סדר גודל, התוצאה של המכפלה היא סקלר שהוא סכום מכפלות רכיבי הוקטורים המוכפלים בהתאמה. יהי v, u שני וקטורים עם n קואורדינטות v, uRn כך: u = [u1, u2, u3, …, un] , v = [v1 ,v2, v3, …, vn], אז המכפלה הסקלרית שלהם אותה נסמן , היא: . = u1∙v1 + u2∙v2 + u3∙v3 + ⋯ + un∙vn

מכפלה סקלרית אינה מכפלה רגילה כמו של מטריצות, זאת כי לפי כפל מטריצות לא ניתן להכפיל את u ו-v כי שניהם מאותו גודל ואינם ריבועיים. אמנם אם נשחלף אחת מהם זה יתאפשר (תכונה 6 בסעיף הבא).

### תכונות

1. .
2. .
3. .
4. .
5. אם ורק אם u = .
6. . היא המטריצה המשוחלפת של u.

## מכפלה סקלרית במרוכבים - Cn

יהי v, u שני וקטורים מרוכבים כך: u = [u1, u2, u3, …, un] , v = [v1 ,v2, v3, …, vn]. אזי המכפלה הסקלרית שלהם היא: . כאשר הוא הצמוד של v[[5]](#footnote-5).

### תכונות

1. .
2. .
3. .
4. , ויותר מזה . לכן נורמה של וקטור מרוכב היא מספר ממשי.
5. אם ורק אם u = .
6. . כאשר היא הוקטור המשוחלף והצמוד של v - .

## נורמה של וקטור

נורמה של וקטור, נסמן , הוא סקלר המתקבל מהחישוב: . נגדיר "וקטור יחידה" וקטור שהנורמה שלו שווה 1, כלומר .

"נרמול של וקטור u" זה להכפיל את u בסקלר מתאים כך שתוצאת המכפלה היא וקטור היחידה. סקלר זה הוא: .

### משמעות גיאומטרית

נורמה של וקטור הוא בעצם האורך שלו, לכן הנורמה של וקטור יכולה להיות 0 רק בוקטור ה-0. וקטור היחידה הוא באורך אחד והוא הרדיוס במעגל היחידה.

באמצעות הנורמה של שני וקטורים והמכפלה הסקלרית שלהם ניתן לחשב את הזווית שביניהם. נתונים הוקטורים u, v אזי מתקיים: . לפיכך נחשב את הזווית כך: .

נשים לב כי המסקנה העולה מהמשוואה הראשונה היא שמתקיים: . זאת מפני , לכן רק מקטין את הביטוי משמאל, ואפילו עם ערך מוחלט עדיין יתקיים האי שוויון.

## אורתוגונליות

וקטורים u, v יקראו אורתוגונליים זה לזה אם מתקיים: , ונסמן uv. וקטור האפס אורתוגונלי לכל וקטור.

המשמעות הגאומטרית של וקטורים אורתוגונליים היא שהם ניצבים זה לזה.

יחס אורתוגונליות אינו תורשתי (טרנזיטיבי), כלומר אם uv וגם vw אז לא בהכרח uw.

## מכפלה פנימית בממשיים - Rn

היא פונקציה שקולטת שני וקטורים מאותו סדר גודל ופולטת מספר ממשי - . ניתן לראות כי המכפלה הסקלרית היא דוגמא למכפלה פנימית, והיא גם נקראת "המכפלה הפנימית הסטנדרטית". כשנרצה לבדוק האם פונקציה מהסוג שכתבנו לעיל היא מכפלה פנימית נבדוק אם מקיימת את התכונות הבאות:

### תכונות

1. .
2. .
3. .
4. .
5. אם ורק אם u = .

## מרחב מכפלה פנימית

מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי V המכיל קבוצת וקטורים מסוימים, עבורו מוגדרת פונקציה בין כל שני וקטורים במרחב שהיא מכפלה פנימית. נשים לב כי תכונות מכפלה פנימית מכילות גם את כל התנאים הנדרשים לכך ש- Vיהיה מרחב וקטורי.

במרחב מכפלה פנימית נגדיר נורמה של וקטור ואורתוגונליות של שני וקטורים בהתאם למכפלה הפנימית המוגדרת עבור המרחב.

**נורמה של וקטור** - . וקטור יחידה הוא וקטור שמקיים: .

**אורתוגונליות** - שני וקטורים u, v אורתוגונליים אם , ונסמן uv.

## אי שוויון קושי - שוורץ

בכל מרחב מכפלה פנימית מתקיים: .

הערה - יש לשים לב כי חישוב הנורמה של u, v מתאים למכפלה הפנימית כמו שלמדנו בסעיף קודם.

### שימוש במשפט קושי שוורץ להוכחת משפטים:

1. אם נרצה לבחור n מספרים כך שהסכום שלהם יהיה K אך סכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי, אז נשתמש במשפט הבא:

**משפט:** יהיו n *מספרים כך ש-. אזי מתקיים:* *. כלומר סכום הריבועים המינימלי הוא , וזה מתקבל כאשר מתקיים: , מפני ש-.*

**הוכחה:** נבחר שני וקטורים , . נחשב:

v

*.* . . לפי משפט קושי-שוורץ: , כלומר *. ואז* , נחלק ב-n ונקבל , כנדרש.

1. **משפט:** לכל מרחב מכפלה פנימית מתקיים: .

u

מכיוון שכבר למדנו שנורמה היא אורך של וקטור, המשמעות הגיאומטרית של משפט זה היא ששתי וקטורים תמיד יותר ארוכים או שווים לוקטור החיבור ביניהם. משפט זה נקרא "אי שוויון המשולש".

u+v

**הוכחה:** תהיה f המכפלה הפנימית *. מתקיים:*

*.*

*לפי משפט קושי-שוורץ: . אם נעשה שורש נקבל כי:* כנדרש.

# אורתוגונליות ואורתונורמליות

## בסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי

**הגדרה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי v1, v2, …, vn וקטורי הבסיס של V. אם vivj כלומר , לכל *אזי בסיס זה נקרא "בסיס אורתוגונלי". אם בנוסף כל הוקטורים בבסיס הם וקטורי היחידה, כלומר לכל* i*,* *אזי בסיס זה נקרא "בסיס אורתונורמלי". במידה ובסיס מסוים אורתוגונלי אך אינו אורתונורמלי, נוכל לנרמל את כל הוקטורים בו כך שיהפוך לבסיס אורתונורמלי. הבסיס האורתונורמלי הכי מפורסם לפי מכפלה סקלרית הוא הבסיס הסטנדרטי.*

***טענה:*** *לכל מרחב מכפלה פנימית יש בסיס אורתוגונלי.*

***הוכחה:*** *לפי תהליך גרהם-שמידט, שנלמד בסעיף הבא, לכל וקטורים שהם בסיס של מרחב מכפלה פנימית ניתן למצוא וקטורים אורתוגונליים שפורשים את אותו המרחב.*

***טענה:*** *יהיו* v1, v2, …, vn *וקטורים השונים מ-* אורתוגונליים אחד לשני אזי הם בלתי תלויים ליניארית (בת"ל), ומהווים בסיס למרחב שהם פורשים.

***הוכחה:*** נניח כי v1, v2, …, vn וקטורים אורתוגונליים אחד לשני ושונים מ- המקיימים: , כדי להוכיח שהם גם בת"ל יש להוכיח .

*נסתכל על המכפלה הסקלרית הבאה*: *. נצמצם את כל המכפלות הפנימיות של וקטורים אורתוגונליים ונקבל:* . מכיוון ש לפי ההנחה אזי חייב להיות: . כך נעשה לכל הוקטורים כאשר במשוואה הראשונה הוקטור השני במכפלה הפנימית יהיה כל פעם וקטור אחר, ונקבל כנדרש.

### שימוש בבסיס אורתונורמלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי v1, v2, …, vn וקטורי הבסיס של V, ויהי . אם נרצה לכתוב את w כצירוף לינארי של הבסיס*, אזי צריך למצוא סקלרים* 𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n כך ש*מתקיים*:. לשם כך צריך לפתור מערכת משוואות ליניאריות שיכולה להיות מאוד מסובכת וארוכה. אמנם אם ידוע כי הבסיס הינו אורתונורמלי זה קל מאוד.

***טענה:*** *יהי* V *מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית* f*, ויהי* v1, v2, …, vn בסיס אורתונורמלי ל-V, ויהי . *אזי* .

***הוכחה:*** *נניח כי .* צ"ל *לכל* i. *נשים לב כי: . נצמצם את כל המכפלות הפנימיות של וקטורים אורתוגונליים ונקבל: . מכיוון שהבסיס גם אורתונורמלי אזי* . ומכאן . מ.ש.ל.

## תהליך גרהם-שמידט

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו u1, u2, …, un וקטורים הפורשים את V אך אינם אורתוגונליים זה לזה, באמצעות תהליך גרהם-שמידט נמצא v1, v2, …, vn וקטורים שהם בסיס אורתוגונלי ל-V.

***קלט:***u1, u2, …, un וקטורים.

**פלט:** v1, v2, …, vn *וקטורים כך ש-*vivj *לכל , הם פורשים את אותו המרחב* span{u1, u2, …, un} = span{v1, v2, …, vn}*. ויותר מכך גם כל* k *וקטורים פורשים את אותו מרחב* span{u1} = span{v1}, span{u1, u2} = span{v1, v2}*, וכן הלאה עד* n.

***תהליך:*** *(1) .*

1. *באופן כללי נגדיר כל וקטור* vi *כאשר* , כלומר: 1, 2, …, i-1, i, …, n בצורה הבאה:

אם נרצה שהבסיס יהיה גם אורתונורמלי ננרמל את כל הוקטורים, כלומר כל וקטור vi נחלק בנורמה שלו . לעיתים כשנרצה לנרמל וקטור vi יהיה יותר נוח לנרמל את הוקטור כדי לצמצם שברים.

## מרחב משלים אורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית f, ויהי U תת מרחב של V כך שמתקיים . אזי "המרחב המשלים האורתוגונלי של U", שאותו נסמן , הוא מרחב שכל וקטור בו שייך ל-V והוא אורתוגונלי לכל הוקטורים ב-U. כלומר .

**טענה:** הוא תת מרחב של V.

**הוכחה:** יש להוכיח שלוש תכונות:

1. צ"ל . אכן מתקיים כי הוקטור אורתוגונלי לכל וקטור. *לכן תמיד שייך למרחב המשלים האורתוגונלי.*
2. צ"ל אם  *אזי . אם*  אזי , ולכן . וכן אם אז*י , ולכן . משתי משוואות אלו יוצא שגם , ואז , לכן .*
3. צ"ל אם  *אזי . אם*  אזי , ולכן *. מכאן שגם מתקיים , ולכן . מסקנה .*

***טענה:*** יהי V מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית f, ויהי U תת מרחב של V כך שמתקיים , *ויהי* u1, u2, u3, …, un *בסיס ל-*U*, ויהי . אם לכל , אזי* v *אורתוגונלי לכל הוקטורים ב-*U*. באמצעות משפט זה, אם נרצה למצוא וקטור ב-,* *אז במקום לעשות אינסוף בדיקות עם כל וקטור ב-*U*, נמצא רק וקטור שאורתוגונלי לבסיס של* U *ואז הוא בודאי אורתוגונלי לכל וקטור ב-*U*.*

***הוכחה:*** *יהי* . נניח שמתקיים *. צ"ל . נציג את* w *כצירוף ליניארי של הבסיס* . נשים לב כי . *כל המכפלות הפנימיות הם של וקטורים אורתוגונליים*, לכן . ואזי כנדרש.

**טענה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי U תת מרחב של V**.** אזי .

**הוכחה:** נוכיח בשיטת אי-שוויון דו-כיווני.

כיוון 1 - נוכיח . יהי u1, u2, …, uk בסיס אורתוגונלי ל-U, ויהי w1, w2, …, wn בסיס אורתוגונלי ל-. אזי כל הבסיסים יחד u1, u2, …, uk, w1, w2, …, wn הם בת"ל לפי טענה 2 בסעיף ח', והם כולם שייכים ל-V. לכן: *.*

*כיוון 2 - נוכיח .* יהי u1, u2, …, uk בסיס ל-U, *נוסיף לבסיס זה עוד וקטורים בת"ל כך שנקבל* u1, u2, …, uk, v1, v2, …, vm *שהוא בסיס ל-*V. *אזי המימד של* V *הוא: , כאשר . יש להוכיח כי .* נפעיל תהליך גרהם שמידט על u1, u2, …, uk, v1, v2, …, vm, ונקבל w1, w2, …, wk, wk+1, wk+2, …, wk+m וקטורים אורתוגונליים זה לזה. לפי התכונה של תהליך גרהם שמידט מתקיים בנוסף: span{u1, u2, …, uk }= span{w1, w2, …, wk }, כלומר w1, w2, …, wk הוא בסיס אורתוגונלי ל-U. מכיוון שכל הוקטורים wk+1, wk+2, …, wk+m אורתוגונליים לוקטורים w1, w2, …, wk, אזי wk+1, wk+2, …, wk+m שייכים ל- *והם גם בת"ל. לכן . מ.ש.ל.*

***טענה:*** *מתקיים:* .

***הוכחה***:*נוכיח לפי המשפט האומר שאם וגם , אזי .*

*נוכיח . יהי , צ"ל . לפי ההנחה* x *אורתוגונלי לכל הוקטורים ב-, לכן אכן מתקיים: . לפי הסעיף קודם מתקיים: . ומכיוון ש- וגם אורתוגונליים אזי גם מתקיים: . אם נחסיר בין המשוואות נקבל . הוכחנו כי לפי המשפט* אכן מתקיים: .

## פעולות בין תתי מרחבים

### חיתוך תתי מרחבים

יהי V מרחב וקטורי ויהיו U1 ו-U2 תתי מרחב של V. החיתוך של שני תתי מרחבים אלו הוא גם תת מרחב של V, המקיים את מערכת המשוואות של שני תתי המרחבים במקביל.

כדי למצוא בסיס ומימד ל- נמצא מערכת משוואות ל- U1 ומערכת משוואות ל-U2, ניקח את כל המשוואות ונציבם ביחד במטריצה ונדרג. נמצא את הפתרונות של כל רכיבי המרחבים x1, x2, …, xn, ונציבם בוקטור אחד. כך נמצא וקטור המקיים את התנאים של U1 וגם את התנאים של-U2. נפרק וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם. וקטורים אלו הם בסיס לחיתוך של ומספרם הוא המימד.

### איחוד תתי מרחבים}

*איחוד תתי מרחבים אינו תת מרחב, אלא אם כן אחד מוכל בשני שאז נקבל את המרחב הגדול.*

### חיבור תתי מרחבים

יהי V מרחב וקטורי ויהיו U1 ו-U2 תתי מרחב של V. החיבור של שני תתי מרחבים אלו הוא גם תת מרחב של V, כך:

משפט - מתקיים:

משפט - בדומה לחוקי דה מורגן מתקיים:

אם החיתוך של שני תתי המרחבים U1 ו-U2 - , הוא וקטור ה-0 ((0, 0, 0, …, 0, מה שאומר שגם המימד שלו שווה ל-0, אז הסכום של הוא "סכום ישר". במקרה של סכום ישר מתקיימת הנוסחה: . בנוסף מתקיים: אם (u1, u2, u3, …, un) הוא הבסיס של תת המרחב U1, ו- (w1, w2, w3, …, wn) הוא הבסיס של תת המרחב U2, אז הבסיס של תת המרחב הוא: u1, u2, u3, …, un, w1, w2, w3, …, wn)), כלומר אין וקטורים מיותרים.

## מטריצה אורתוגונלית

תהי מטריצה ריבועית ממשית, אם השורות של המטריצה מהוות בסיס **אורתונורמלי** ל-Rn לפי המכפלה הסקלרית, אזי A היא "מטריצה אורתוגונלית".

**טענה:** A היא מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם מתקיים: *. נוכל להסיק מכך כי גם מתקיים:* .

**הוכחה:** נשים לב כי בכפל המטריצות כל איבר בשורה i ובעמודה j הוא בעצם תוצר של מכפלה של שורה i במטריצה A בעמודה j במטריצה AT. אמנם מכיוון שבמטריצה AT כל העמודות מתחלפות עם השורות, כל איבר במטריצה הוא מהצורה . בנוסף, תכונת מכפלה פנימית היא . לכן המטריצה שנקבל היא מהצורה . מכיוון שכל השורות אורתונורמליות זו לזו נקבל שכל מכפלה פנימית כאשר , אמנם כאשר  *מתקיים: . לכן ניתן לראות כי המטריצה שנקבל היא אכן* I.

**טענה:** אם A היא מטריצה אורתוגונלית אזי גם העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי ל-Rn.

**הוכחה:** בליניארית 1 למדנו כי אם אזי גם *. לכן, אם* A *הינה מטריצה אורתוגונלית אזי נוכל להסיק מטענה קודמת כי גם מתקיים: . נשים לב כי . המסקנה היא שאם* A *הינה מטריצה אורתוגונלית אזי גם* AT *היא מטריצה אורתוגונלית. לפי הגדרת מטריצה אורתוגונלית השורות ב-*AT *אורתוגונליות ל-*,Rn *ומכיוון שהעמודות ב-*A *הם השורות של* AT, *לכן גם העמודות של* A *הינם אורתוגונליות.*

***טענה:*** *אם* A, B *הינם מטריצות אורתוגונליות אזי גם המטריצה* AB *הינה אורתוגונלית.*

***הוכחה:*** *מהמסקנה מטענה 1 ידוע לנו: וגם . נשים לב כי מתקיים: . לכן גם מטריצה* AB *אורתוגונלית.*

***טענה:*** *אם מטריצה* A *אורתוגונלית אזי . אזהרה: זהו לא משפט "אם ורק אם".*

***הוכחה:*** *מכיוון ש-*A *אורתוגונלית אזי , לכן . מלינארית 1 ידוע לנו ש-* וגם . לכן . ומכאן ש-, לכן אכן מתקיים: .

***טענה:*** *יהיו*  *שני וקטורים,* *ויהי* A *מטריצה אורתוגונלית, אזי מתקיים: .*

***הוכחה:*** *.*

***מסקנות****:**(1)**.*

*(2) אם אזי .*

## העתקה אורתוגונלית

*אם* A *היא מטריצה אורתוגונלית אזי ההעתקה הליניארית: היא "העתקה אורתוגונלית". המשמעות הגיאומטרית היא שהעתקה אורתוגונלית רק מסובבת את המרחב ולא מעוותת אותו, אמנם כן יכול להיות שיקוף. כלומר בכל וקטור במרחב נשמרים שתי תכונות:*

1. *כל וקטור שומר על האורך שלו, מפני שהנורמות שוות: .*
2. *כל וקטור שומר על הזווית שלו, מפני שבמשוואה שלמדנו לעיל (סעיף ג' בפרק קודם) שבאמצעותה מחשבים זווית שבין שני וקטורים* u, v *מתקיים: .*

## מטריצה אוניטרית

תהי מטריצה ריבועית מרוכבת, אם השורות של המטריצה מהוות בסיס **אורתונורמלי** ל-Cn לפי המכפלה הסקלרית של המרוכבים, אזי A היא "מטריצה אוניטרית".

מטריצה אוניטרית היא מטריצה שדומה מאוד למטריצה אורתוגונלית, אלא שמטריצה אורתוגונלית היא במספרים מרוכבים ומטריצה אוניטרית היא במספרים מרוכבים. המשפטים שלהם גם זהים מלבד שינוי אחד במשפט על הדטרמיננטה.

**טענה:** A היא מטריצה אוניטרית אם ורק אם מתקיים: *. נוכל להסיק מכך כי גם מתקיים:* . הערה: היא המטריצה המשוחלפת והצמודה של v -

**טענה:** אם A היא מטריצה אוניטרית אזי גם העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי ל-Cn.

***טענה:*** *אם* A, B *הינם מטריצות אוניטריות אזי גם המטריצה* AB *הינה אוניטרית.*

***טענה:*** *אם מטריצה* A *אוניטרית אזי . כלומר הדטרמיננטה של* A *היא מספר מרוכב שאם נעשה לו ערך מוחלט נקבל 1. אזהרה: זהו לא משפט "אם ורק אם".*

***הוכחה:*** *מכיוון ש-*A *אוניטרית אזי , לכן . מלינארית 1 ידוע לנו ש-* וגם . לכן . ומכאן ש-. וידוע לנו גם מליניארית 1 שכשמכפילים מספר מרוכב בצמוד שלו מקבלים את הערך המוחלט של המספר המרוכב בריבוע, לכן נקבל , ומכאן אכן מתקיים: .

## מטריצה הרמיטית

**הגדרה:** מטריצה מרוכבת A תיקרא "מטריצה הרמיטית" אם מתקיים בה: . במטריצה זו אלכסון ראשי חייב להיות ממספרים ממשיים. לדוגמא: .

## המשפט הספקטרלי

### בממשיים

**המשפט:** תהי A מטריצה ממשית סימטרית, כלומר שמקיימת , אזי:

1. כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.
2. יש ל-A n וקטורים עצמיים אורתוגונליים אחד לשני.

### במרוכבים

**המשפט:** תהי A מטריצה מרוכבת הרמיטית, אזי:

1. כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.
2. יש ל-A n וקטורים עצמיים אורתוגונליים אחד לשני.

**הוכחת (1):** המשפט של הממשיים הוא מקרה פרטי של המרוכבים לכן נוכיח רק עבור המרוכבים. נניח ש-𝜆 ערך עצמי של A עם וקטור עצמי v, כלומר מתקיים: . צ"ל: או במילים אחרות . נסתכל על המכפלה הסקלרית המרוכבת .

מצד אחד מתקיים:

מצד שני מתקיים:

נמצא כי , ומכיוון ש- שהרי , אזי אכן .

1. במקרה של dim( ker(f) ) = dim(u) המשמעות היא ש: dim( img(f) ) = 0, מצב זה אפשרי רק אם המטריצה המייצגת היא מטריצת ה-0. במקרה של העתקה F: Rn -> Rm כאשר n>m אזי לא יכול להיות מצב בו dim( ker(f) ) = 0, מפני שאז dim( img(f) ) יצטרך להיות שווה ל-n וזה לא אפשרי כי img(f) הוא תת מרחב של Rm והמימד שלו לא יכול להיות גדול מ-m. [↑](#footnote-ref-1)
2. משפט העקרונות השקולים אומר כך: תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, אזי התנאים הבאים הם שקולים, כלומר או שכולם מתקיימים או שכולם לא מתקיימים:

   A הפיכה.

   det(A) 0 .

   העמודות של A בלתי תלויים לינארית.

   השורות של A בלתי תלויים לינארית.

   יהי b וקטור כלשהו של מספרים, אזי למערכת A∙x = b יש פתרון יחיד.

   **0 אינו ערך עצמי של המטריצה.** [↑](#footnote-ref-2)
3. משפט בזו אומר אם שורש הפולינום p(x) הוא a אזי חלוקת הפולינום ב-(x-a) תהיה ללא שארית. וכן ההיפך, אם פולינום מתחלק ב-(x-a) ללא שארית אז a הוא שורש הפולינום. [↑](#footnote-ref-3)
4. בדרך כלל נסמן מטריצה אלכסונית ב-D מהמילה Diagonal. כל מטריצה אלכסונית היא גם לכסינה, מפני שניתן לקיים את המשוואה A = P∙D∙P-1 על ידי שנבחר P מטריצת היחידה שההופכית שלה גם היא מטריצת היחידה, וכן נבחר את D בתור המטריצה האלכסונית A עצמה, כך שהכפלתה במטריצות היחידה תיתן שוב את A שזה בדיוק מה שאומרת המשוואה. [↑](#footnote-ref-4)
5. "מספר צמוד" הוא מספר שבו מוחלף הסימן של החלק המדומה בלבד, ממינוס לפלוס ומפלוס למינוס. החלק הממשי נותר ללא שינוי. אם *אז* . *ואם*  *אז* . [↑](#footnote-ref-5)